

Rapport sur le mémoire d'habilitation à diriger des recherches intitulé  
*Generalized inverses, semigroups and rings*  
présenté par **Xavier Mary**

Rapporteur, référent local du candidat : Christian Léonard

Le mémoire présenté par Xavier Mary est composé de cinq parties.

Dans la partie I, la théorie bien établie des éléments groupe inversibles (*i.e.* ayant un inverse dans un sous-groupe), des semigroupes complètement réguliers et des anneaux fortement réguliers est présentée sous l'angle des inverses généralisés et des relations de Green. Les connexions entre ces différentes notions sont dégagées. Cette exploration prélude à l'étude approfondie des semigroupes et des anneaux qui va suivre et qui se fera avec un point de vue analogue.

La notion d'inverse le long d'un élément (également appelé inverse de Mary à la suite des travaux fondateurs du candidat) est introduite dans la partie II. Sa découverte a été largement adoptée par la communauté des spécialistes. Elle est très féconde et intervient à plusieurs reprises dans les travaux présentés dans le mémoire. Ses relations avec des notions plus habituelles d'inverse généralisé, comme celles de d'inverse de groupe, d'inverse de Drazin ou de Moore-Penrose y sont établies. Les inverses le long de centralisateurs et d'idempotents sont regardés avec attention, une formule de Cline est d'ailleurs établie. Une interprétation catégorielle de l'inverse le long d'un élément permet également de clarifier le lien avec la  $(b, c)$ -inverse définie par Drazin en 2012, et d'étudier des lois d'ordre inverse (qui généralisent l'identité classique  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ) pour ce type d'inverses. Des résultats spécifiques concernant les inverses le long d'un élément sont aussi présentés dans le cadre des anneaux.

La partie III est consacrée aux inverses de groupe. Les résultats obtenus concernent en particulier les inverses de groupe de produits d'éléments d'un anneau. Leurs preuves s'appuient entre autre sur des combinaisons d'arguments issus des théories des semigroupes et des anneaux. Des critères d'existence pour l'inverse de groupe d'un produit d'éléments réguliers sont obtenus, ainsi que des formules pour ces inverses. Dans la continuité de ces formules le problème ouvert de longue date de la loi de l'ordre inverse  $(ab)^\# = b^\#a^\#$  est abordé et résolu entièrement dans le cas des semigroupes stables et des anneaux Dedekind-finis. Un lien entre les éléments "special clean" et les éléments groupe inversibles d'un anneau est aussi dégagé.

La partie IV est dédiée à la structure algébrique des semigroupes. Il y est fait grand usage des relations de Green, mais également des inverses le long d'un élément. Dans cette optique, les théorèmes de structure sont obtenus essentiellement en identifiant certaines classes de semigroupes grâce à deux outils principaux : les relations de Green généralisées et la notion d'inverse modulo  $\mathcal{H}$  (où  $\mathcal{H}$  est la relation de Green). Bien que cette dernière relation ne soit pas une relation d'équivalence en générale, l'utilisation de l'inverse le long d'un élément permet tout de même d'étudier ce type de propriétés, et de dégager des nouvelles classes de semigroupes ayant une structure algébrique bien identifiée. On trouve également dans cette quatrième partie des résultats concernant les S-acts (ensembles munis d'une action de semigroupe), ainsi que des résultats sur les semigroupes qui sont issus de l'étude des modules et anneaux perspectifs. Ici,

la notion de perspectivité dans un anneau  $\gamma$  est revue du point de vue des semigroupes à l'aide de chaînes d'idempotents associés.

Quelques résultats récents de théorie des anneaux et des modules sont présentés à la partie V. Ils ont en commun d'être obtenus à l'aide d'inverses généralisés et ont trait à des notions qui en apparence semblent purement additives comme par exemple les "clean elements" (somme d'un idempotent et d'un élément inversible) dans des anneaux et la perspectivité (de facteurs directs) dans des modules. L'accent est mis sur une approche de type semigroupe en évitant autant que faire se peut de s'appuyer sur la structure additive ou l'utilisation d'une identité. Les principaux résultats présentés dans cette partie concernent des caractérisations à l'aide d'inverses généralisés (principalement d'inverse de groupe, inverse le long d'un élément) de certains éléments d'anneaux, l'étude de formules particulières (loi de l'ordre inverse, formule de Cline, lemme de Jacobson) pour ces inverses généralisés, l'extension des notions précédentes au cas des anneaux généraux (*i.e.* non unitaires), l'étude de chaînes d'idempotents associés et de leurs relations avec la perspectivité de sous-modules, ainsi que celle des éléments groupe inversibles et "special clean". Le mémoire s'achève avec des résultats de théorie des nombres liés à l'utilisation d'un *algorithme d'Euclide* pour étudié les chaînes d'idempotents d'un anneau.

N'étant pas spécialiste d'algèbre, je ne peux que m'appuyer sur la liste des publications du candidat et sur les évaluations des rapporteurs du mémoire d'habilitation.

Xavier Mary publie abondamment dans les meilleures revues (internationales et à comité de lecture) de sa discipline. Le spectre de sa recherche est exceptionnellement large, au point que chacun des trois rapporteurs a évalué une partie spécifique du mémoire. Lorsqu'on sait qu'il a obtenu sa thèse de doctorat dans un domaine des mathématiques totalement différent (analyse fonctionnelle et statistique mathématique), il y a de quoi être impressionné. Il est remarquable que bien que les trois directions de recherche de Xavier Mary correspondent à des communautés de chercheurs séparées, les problèmes résolus ont des traits communs qui appellent des techniques de résolution analogues. Il a su découvrir ces connexions, c'est ce qu'André Leroy évoque avec admiration dans son rapport.

Les rapporteurs, internationalement reconnus dans leurs domaines de recherche, soulignent l'apport spécifique et significatif de Xavier Mary dans chacun des domaines qu'il explore. Tous trois reconnaissent qu'il a un style et une vision (*unique and off-beat ideas, unique insights, significant contributions in several directions, profound and longstanding impact on the future of semigroup theory and ring theory, the author's original works inspired many researchers and became central topics for a number of scholars, ...*). Cette constatation est le plus beau des compliments qu'un.e mathématicien.ne puisse espérer.

L'ensemble des travaux présentés par Xavier Mary est remarquable.

Je donne un avis très favorable à la soutenance de son habilitation à diriger des recherches.

Fait à Paris, le 15 mars 2022

Christian Léonard  
Professeur à l'université Paris Nanterre